ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗ

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ

ପ୍ରକାଶକ
ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗ

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ

ପ୍ରକାଶକ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ (ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗ)
ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ
ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଓ ପ୍ରକାଶିତ
© ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ସମ୍ପାଦନା ମଣ୍ଡଳୀ
ପ୍ରଫେସର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ (ଲେଖକ ଓ ସମୀକ୍ଷକ)
ଡକ୍ଟର ପ୍ରସନ୍ନ କୁମାର ଶତପଥୀ (ଲେଖକ)
ଡକ୍ଟର ଜଗନ୍ନାଥ ପ୍ରସାଦ ଦେବତା (ଲେଖକ)
ଶ୍ରୀ ରଘୁନାଥ ମହାପାତ୍ର (ଲେଖକ)
ଡକ୍ଟର ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର (ଲେଖକ ଓ ସଂଯୋଜକ)
ପ୍ରଥମ ସଂସ୍କରଣ : ୨୦୦୭ / ୪,୦୦,୦୦୦
ଦ୍ୱିତୀୟ ମୁଦ୍ରଣ : ୨୦୦୮ / ୧,୫୦,୦୦୦
ତୃତୀୟ ମୁଦ୍ରଣ : ୨୦୦୯ / ୧,୦୦,୦୦୦
ଚତୁର୍ଥ ମୁଦ୍ରଣ : ୨୦୧୦ / ୧,୩୦,୦୦୦
ପଞ୍ଚମ ମୁଦ୍ରଣ: ୨୦୧୦/୧,୨୦,୦୦୦
ଷଷ୍ଠ ମୁଦ୍ରଣ : ୨୦୧୧/୧,୦୦,୦୦୦
ଆର୍ଟଫୁଲ :
କମ୍ପ୍ୟୁପ୍ରିଣ୍ଟ, ଲିଙ୍କରୋଡ, କଟକ-୧୨
ମୁଦ୍ରଣ : ମହିମା ଅଫସେଟ୍, କଟକ
ସୁଦର୍ଶନ ସ୍କାନରସ୍ ପ୍ରାଃ ଲିମିଟେଡ୍, କଟକ
ଜଗନ୍ନାଥ ପ୍ରୋସେସ୍ ପ୍ରାଃ ଲିମିଟେଡ୍, କଟକ

ମୂଲ୍ୟ: ଟ.୬୭.୦୦(ସତଷଠି ଟଙ୍କା ମାତ୍ର)

ମୁଖବନ୍ଧ

ଆଜିର ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗରେ ଗଣିତ ମଣିଷ ଜୀବନଧାରାକୁ ବିବିଧ ଭାବରେ ନିୟନ୍ତ୍ରଣ କରୁଛି । କାରଣ ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ - ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଗବେଷଣା ଜନିତ ଜ୍ଞାନ ଗଣିତକୁ ନୂଆ ମୋଡ଼ ଦେବାରେ ଲାଗିଛି । ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ମଧ୍ୟ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ତଥା ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଆସିବା ସ୍ୱାଭାବିକ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ 2000 ଏବଂ 2005 (National Curriculum Frame Work - 2000 and 2005) ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର (ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ) ପାଇଁ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଛନ୍ତି ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ 2006-2007 ଶିକ୍ଷା ବର୍ଷରେ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ ନୂତନ ଭାବେ ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ୍ ପ୍ରକାଶ କରିସାରିଛନ୍ତି । ଅଧୁନା ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ 2007-2008 ଏବଂ ତତ୍ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶିକ୍ଷାବର୍ଷମାନଙ୍କ ପାଇଁ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ପୁସ୍ତକର ଏହି ନୂତନ ସଂସ୍କରଣରେ ତ୍ରିକୋଣମିତି ପାଠ ପାଇଁ ଏକ ଅଧ୍ୟାୟ (ଏକାଦଶ ଅଧ୍ୟାୟ)କୁ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି ।

ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ରାଜ୍ୟସ୍ତରୀୟ ଏକ କର୍ମଶାଳାରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ମଧ୍ୟ ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି ଉକ୍ତ ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି ।

ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ଆନ୍ତରିକ ସହଯୋଗ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ, ସମୀକ୍ଷକ ଓ ସଂଯୋଜକଙ୍କୁ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଉଛି । ଆଶା କରୁଛି, ପୁସ୍ତକଟି ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ତଥା ଶିକ୍ଷକ-ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆଦୃତ ହେବ ।

ସଭାପତି

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2000 ଏବଂ 2005 ତଥା ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା (Syllabus)କୁ ଭିତ୍ତି କରି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଗଣିତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ାର ସମୟୋପଯୋଗୀ ନବୀକରଣ ସହିତ ଗଣିତ ପାଇଁ ଏକ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ାର ପ୍ରବର୍ତ୍ତନ କରିଛନ୍ତି । ଏହି ନୂତନ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀପାଇଁ ମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ରଚନା କରିଛନ୍ତି । ଗଣିତ ପ୍ରତି ଆଗ୍ରହୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ ଏହି ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ରଚନା କରିବା ସମୟରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ଓ ବୌଦ୍ଧିକ ବିକାଶକୁ ମଧ୍ୟ ଧ୍ୟାନ ଦିଆଯାଇଛି । ପୁସ୍ତକଟିର ରଚନା ସମୟରେ ଭାଷା, ବିଷୟ, ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀ ତଥା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ସଂସୁଗଠିତ କରାଯାଇ ଅଭ୍ୟାସ ନିମିତ୍ତ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀକୁ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯିବାର ପ୍ରୟାସ କରାଯାଇଛି ।

ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନ ଦ୍ୱାରା ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ମନରେ କେତେକ ତଥ୍ୟଗତ ଧାରଣା ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ସତ, ମାତ୍ର ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ହେଲା, ପିଲାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଚିନ୍ତାଧାରା (Analytical thinking) ଓ ଯୋଜନା ଭିତ୍ତିକ ତଥା ସୁଶୃଙ୍ଖଳିତ କାର୍ଯ୍ୟଧାରାର ବିକାଶ ସାଧନ କରିବା । ପ୍ରଥମ ଲକ୍ଷ୍ୟ ଲାଗି କେତେକ ସୂତ୍ର ଓ ସମାଧାନ ପ୍ରଣାଳୀ ଯଥେଷ୍ଟ ହୋଇପାରେ; ମାତ୍ର ଦ୍ୱିତୀୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ ସାଧନ କେବଳ ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀର ସୁସଂଯୋଜନାଦ୍ୱାରା ସମ୍ଭବ । ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକଟିରେ ଅଭ୍ୟାସ ନିମିତ୍ତ ଅଧିକ ସୁଯୋଗ ସୃଷ୍ଟି କରିବା ଲାଗି ବହୁସଂଖ୍ୟକ ସମାହିତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ ଦିଆଯିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଐତିହାସିକ ପୃଷ୍ଠଭୂମି ଓ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କର କୃତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନାପ୍ରଦାନପୂର୍ବକ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦିଗ ପ୍ରତି ଦୃଷ୍ଟି ଦିଆଯାଇଛି । ନୂତନ ଭାବେ ତ୍ରିକୋଣମିତି ପାଠକୁ ପୁସ୍ତକରେ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି ।

ପୁସ୍ତକଟିକୁ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ କରିବାର ସମସ୍ତ ଉଦ୍ୟମ କରାଯାଇଥିବା ସତ୍ତ୍ୱେ, ଯଦି ଏଥିରେ କୌଣସି ମୁଦ୍ରଣଜନିତ, ଭାଷାଗତ ବା ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ, ସେଥିପ୍ରତି କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରାଗଲେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂସ୍କରଣରେ ତାହାର ସଂଶୋଧନ କରାଯିବ ।

ଆଶା କରୁ ପୁସ୍ତକଟି ଶିକ୍ଷକ-ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଶିକ୍ଷାଦାନ କାର୍ଯ୍ୟରେ ସହାୟକ ହେବ ।

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ

ସୂଚୀ

ଭାରତର ସମ୍ବିଧାନ

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଆମ୍ଭେ ଭାରତବାସୀ ଭାରତକୁ ଏକ ସାର୍ବଭୌମ, ସମାଜବାଦୀ, ଧର୍ମନିରପେକ୍ଷ, ଗଣତାନ୍ତ୍ରିକ ସାଧାରଣତନ୍ତ୍ରରେ ପରିଣତ କରିବାର ଦୃଢ଼ ସଂକଳ୍ପ ନେଇ ଓ ଏହାର ନାଗରିକମାନଙ୍କୁ

ସାମାଜିକ, ଅର୍ଥନୈତିକ ଓ ରାଜନୈତିକ ନ୍ୟାୟ;

ଚିନ୍ତା, ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି, ବିଶ୍ୱାସ, ଧର୍ମରେ ସ୍ୱାଧୀନତା;

ଅବସ୍ଥା ଓ ସୁଯୋଗର ସମାନତା ପ୍ରଦାନ କରି ଓ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟକ୍ତିର ସମ୍ମାନ ସହ ଭ୍ରାତୃତ୍ୱ ଏବଂ ଦେଶର ଏକତା ଓ ସଂହତି ରକ୍ଷା କରି

ଆମର ଏହି ସମ୍ବିଧାନ ପ୍ରଣୟନ ସଭାରେ ୧୯୪୯ ମସିହା ନଭେମ୍ବର ୨୬ ତାରିଖ ଦିନ ଏହି ସମ୍ବିଧାନକୁ ପରିଗ୍ରହଣ ଓ ପ୍ରଣୟନ କରି ନିଜଠାରେ ସମର୍ପଣ କଲୁ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ (କ)

୫୧(କ) ଧାରା ମୌଳିକ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ —

ଭାରତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକର ନିମ୍ନଲିଖିତ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ ହେବ —

(କ) ସମ୍ବିଧାନ ମାନି ଚଳିବା ଓ ଏହାର ଆଦର୍ଶ ଏବଂ ଜାତୀୟ ପତାକା, ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତ ଓ ଅନୁଷ୍ଠାନମାନଙ୍କୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଖ) ଯେଉଁସବୁ ମହନୀୟ ଆଦର୍ଶ ଆମ ଜାତୀୟ ସ୍ୱାଧୀନତା ସଂଗ୍ରାମକୁ ଅନୁପ୍ରାଣିତ କରିଥିଲା, ତାହାକୁ ସ୍ମରଣ ଓ ଅନୁସରଣ କରିବା;

(ଗ) ଭାରତର ସାର୍ବଭୌମ, ଏକତା ଓ ସଂହତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା;

(ଘ) ଦେଶର ପ୍ରତିରକ୍ଷା କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ପଡ଼ିଲେ ଜାତୀୟ ସେବା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ଙ) ଧର୍ମନୈତିକ, ଭାଷାଗତ, ଆଞ୍ଚଳିକ କିମ୍ବା ଗୋଷ୍ଠୀଗତ ଭିନ୍ନତାକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ଭାରତର ସବୁ ଅଧିବାସୀମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସହମତିତା ଓ ଭ୍ରାତୃଭାବ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଏବଂ ନାରୀମାନଙ୍କର ସମ୍ମାନରେ ଆଞ୍ଚ ଆସିବା ଭଳି କାର୍ଯ୍ୟରୁ ନିବୃତ୍ତ ରହିବା;

(ଚ) ଆମର ବିବିଧ ସଂସ୍କୃତିର ମୂଲ୍ୟବାନ ଐତିହ୍ୟକୁ ଯଥାର୍ଥ ମୂଲ୍ୟ ଦେବା ଓ ସାଇତି ରଖିବା;

(ଛ) ଅରଣ୍ୟ, ହ୍ରଦ, ନଦୀ, ପଶୁପକ୍ଷୀ ସମ୍ବଳିତ ପ୍ରାକୃତିକ ପରିବେଷ୍ଟନୀର ସୁରକ୍ଷା ଓ ଉନ୍ନତି କରିବା ଓ ଜୀବମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ସଦୟ ହେବା;

(ଜ) ବୈଜ୍ଞାନିକ ମୂଲ୍ୟବୋଧ, ମାନବିକତା ଓ ଅନୁସନ୍ଧିତ୍ସା ତଥା ସଂସ୍କାର ମନୋଭାବ ଧାରଣ କରିବା;

(ଝ) ସର୍ବସାଧାରଣ ସମ୍ପତ୍ତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା ଓ ହିଂସା ତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଞ) ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଓ ସମଷ୍ଟିଗତ ଉତ୍କର୍ଷ ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ଯାହା ଫଳରେ ଦେଶ ସର୍ବଦା ଉଚ୍ଚତର ଚେଷ୍ଟା ଓ କୃତିତ୍ୱ ଦିଗରେ ଆଗେଇ ଯିବ;

(ଟ) ମାତା ପିତା ହୁଅନ୍ତୁ ବା ଅଭିଭାବକ, ସେ ତାଙ୍କର ଛଅ ବର୍ଷରୁ ଚଉଦ ବର୍ଷ ବୟସ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସନ୍ତାନ ବା ପ୍ରତିପାଳିତଙ୍କୁ ଶିକ୍ଷାଲାଭର ସୁଯୋଗ ଯୋଗାଇଦେବେ।

ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ
(SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS IN TWO UNKNOWNS)

1.1. ଉପକ୍ରମ :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀର ଗଣିତ ପୁସ୍ତକର ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ $y = mx + c$ (1)

ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା । ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ ଏହି ଫଳନଟିର xy-ସମତଳରେ ଲେଖଚିତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖା । (1)କୁ x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେ ଏକ ସମୀକରଣ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ଓ (1) ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖା ହେତୁ ଏହି ସମୀକରଣକୁ ସରଳରେଖୀୟ ସମୀକରଣ (Linear Equation) ବୋଲି କହୁ । ମାତ୍ର x ଓ y ରେ ସରଳରେଖୀୟ ସମୀକରଣ (କିମ୍ବା ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ)ର ସାଧାରଣ ରୂପ ହେଉଛି $ax + by + c = 0$ (2)

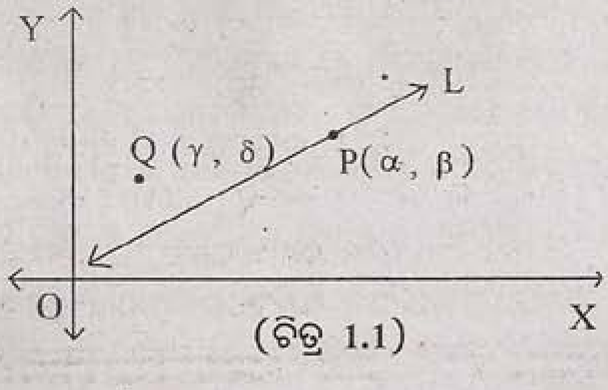
ଯେଉଁଠାରେ a, b ଓ c ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି ଅଟନ୍ତି । $b \neq 0$ ହେଲେ (2) କୁ (1) ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇ ପାରିବ ଏବଂ ତାହାହେଲା $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (3)

ଆମକୁ ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $Ax + B = 0$ (4)

ଦିଆଯାଇଥିଲେ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ ସମୀକରଣ (4)ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ $x = \alpha$ ଲେଖାଯିବା ଦ୍ୱାରା ଯଦି ଏହା ଶୂନ ହୋଇଯାଏ, ତେବେ $x = \alpha$ ସମୀକରଣ (4)ର ସମାଧାନ ହେବ ଏବଂ ଏଠାରେ $\alpha = -\frac{B}{A}$ ହେବ । ସେହିପରି ସମୀକରଣ (2)ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ $x = \alpha$ ଓ $y = \beta$ ଲେଖିଲେ $a\alpha + b\beta + c = 0$ ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ କହିବା ଯେ $x = \alpha$, $y = \beta$ ସମୀକରଣ (2)ର ଏକ ସମାଧାନ । ଏଠାରେ ଆମେ ସମାଧାନଟିକୁ ଏକ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (α, β) ରୂପେ ଲେଖିଥାଉ । ମାତ୍ର xy-ସମତଳରେ (α, β) କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଏ ଯାହା ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinate) ହୋଇଥାଏ । । ବର୍ତ୍ତମାନ (2) ସମୀକରଣଟିକୁ xy-ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା L ରୂପେ ବିଚାର କରାଯାଉ ।

ସମୀକରଣ (2)ର ସମାଧାନ (α, β) ଯାହାକି P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯାହା L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବ । ପକ୍ଷାନ୍ତରେ ଯଦି ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ $Q(\gamma, \delta)$ ନେଇ $x = \gamma$, $y = \delta$ ସମୀକରଣ (2)ରେ ଲେଖିଲେ

$a\gamma + b\delta + c \neq 0$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.1)

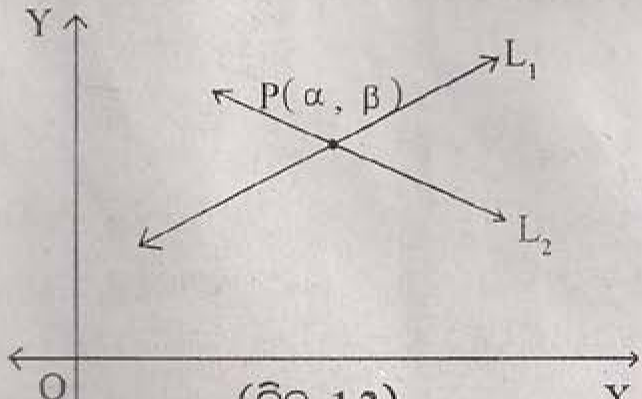
ଅର୍ଥାତ୍ $x = \gamma$, $y = \delta$ ସମୀକରଣ (2)କୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ନାହିଁ ତେବେ (γ, δ) ସମୀକରଣ (2)ର ସମାଧାନ ହେବ ନାହିଁ। ଏହି ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ସମୀକରଣ (2)ର (α, β) ଏକ ସମାଧାନ ହେବ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି (α, β) ବିନ୍ଦୁଟି L ସରଳରେଖା [ସମୀକରଣ (2)ର ଲେଖଚିତ୍ର] ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ। ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିପାରିବ **ଯେ,** x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାଧାନ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ xy-ସମତଳରେ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଦିଆଯାଇଥିଲେ ସେମାନେ ଯଦି ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ତେବେ ସେମାନଙ୍କର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ସମ୍ଭବ। ମନେକର ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (5)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (6)$$

ଓ ସମୀକରଣ (5) ଓ (6) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ L_1 ଓ L_2। ଏହି ସମୀକରଣଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ଏକତ୍ରିତ ଭାବେ ବିଚାର କଲେ ଆମେ ସେମାନଙ୍କୁ ସହସମୀକରଣ ବୋଲି କହୁ। L_1 ଓ L_2 ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ଏବଂ $P(\alpha, \beta)$ ବିନ୍ଦୁଟି ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ। $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ (ଚିତ୍ର 1.2)।

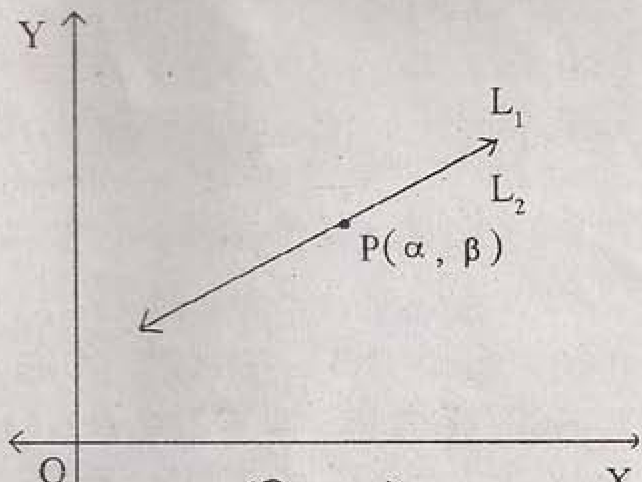


(ଚିତ୍ର 1.2)

(ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର)

ଏଠାରେ ଯେହେତୁ $P(\alpha, \beta)$ ବିନ୍ଦୁଟି ଉଭୟ L_1 ଓ L_2 ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ $x = \alpha$, $y = \beta$ ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ସମୀକରଣ (5) ଓ (6) ସିଦ୍ଧ ହେବେ। ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କଲେ ଆମକୁ ଗୋଟିଏ ଓ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ (α, β) ମିଳିବ। ତେଣୁ ଆମେ କହିବା ଯେ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ (5) ଏବଂ (6) ର ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ। **ସୁତରାଂ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରଛେଦୀ ହେଉଥିଲେ ସେମାନଙ୍କର ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ। ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର (consistent and independent).**

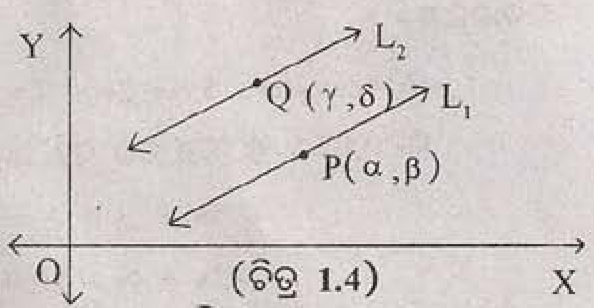
ଯଦି ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ମିଳିତ [ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ (coincident) ହୁଅନ୍ତି] (ଚିତ୍ର 1.3 ଦେଖ), ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଅସଂଖ୍ୟ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ରହିବ। **ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟଙ୍କର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ। ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ନିର୍ଭରଶୀଳ (consistent and dependent).**



(ଚିତ୍ର 1.3)

(ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଅସ୍ୱତନ୍ତ୍ର)

ଯଦି L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର (ଚିତ୍ର 1.4 ଦେଖ) ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ରହିବ ନାହିଁ ଅର୍ଥାତ୍



(ଚିତ୍ର 1.4)

(ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ)

ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ। ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ **(inconsistent)**। ପ୍ରଥମେ ଆମେ କେତେଗୋଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରି ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସହସମୀକରଣ (5) ଓ (6) ସମାଧାନ କରାଯାଇ ପାରିବ।

1.2. ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ବୀଜଗାଣିତିକ ସମାଧାନ :

ମନେକର ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \text{.....................(1)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \text{.....................(2)}$$

ଏ ଦୁଇ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ କିମ୍ବା ଲେଖଚିତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇ ପାରିବ। ପ୍ରଥମେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା କରିବା।

(i) ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପଦ୍ଧତି (Method of Substitution) : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ରୁ ଯେକୌଣସିଟିକୁ ନେଇ ସେଥିରେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ କିମ୍ବା y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। ମନେକର ସମୀକରଣ (1) କୁ ବିଚାର କରାଯାଇ y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ସମୀକରଣ (1)ରେ

ଯଦି $b_1 \neq 0$ ତେବେ $b_1y = -c_1 - a_1x \Rightarrow y = \frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ (3)

(3) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ y ର ମାନ $\frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ମିଳିବ ଓ ଏହା

$$a_2x + \frac{b_2}{b_1}\{-c_1 - a_1x\} + c_2 = 0 \Rightarrow (a_2b_1 - a_1b_2)x + (c_2b_1 - c_1b_2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(c_2b_1 - c_1b_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \Rightarrow x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (4)$$

(4) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ x ର ମାନକୁ (1) କିମ୍ବା (2) ସମୀକରଣରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ପାଇବା

$$a_1\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (5)$$

ଅତଏବ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନ (α, β) ହେଲେ

$$\alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \beta = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{...............(6)}$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି $a_1 \neq 0$ ହୁଏ ତେବେ ଅନୁରୂପ ଭାବେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରି ଅଗ୍ରସର ହେଲେ α ଓ β ଲବ୍ଧ ହୋଇପାରିବ।

ଉଦାହରଣ - 1

ସମାଧାନ କର : $5x + 2y + 2 = 0,\ 3x + 4y - 10 = 0$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$5x + 2y + 2 = 0 \qquad \text{......................(i)}$$

$$3x + 4y - 10 = 0 \qquad \text{......................(ii)}$$

ସମୀକରଣ (i)କୁ ବିଚାର କରି y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଉ।

$$\therefore 2y = -5x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-5x - 2) \qquad \text{......................(iii)}$$

(ii) ଓ (iii)ରୁ $3x + \frac{4}{2}(-5x - 2) - 10 = 0 \Rightarrow 6x + 4(-5x - 2) - 20 = 0$

$$\Rightarrow 6x - 20x - 8 - 20 = 0 \Rightarrow -14x - 28 = 0 \Rightarrow x = -2$$

ସମୀକରଣ (i)ରେ $x = -2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା $5(-2) + 2y + 2 = 0$

$$\Rightarrow 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $(-2, 4)$ ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟରେ $x = -2,\ y = 4$ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ $(-2, 4)$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେଉଛନ୍ତି।

(II) ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି (Method of Elimination) :

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ (1) ଓ (2)ରୁ x କୁ କିମ୍ବା y କୁ ଅପସାରଣ କରାଯାଇଥାଏ। ମନେକର ଆମେ x କୁ ଅପସାରଣ କରିବା। ସମୀକରଣ (1)ରେ xର ସହଗ a_1କୁ ସମୀକରଣ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନକଲେ ଏବଂ ସମୀକରଣ (2)ରେ xର ସହଗ a_2କୁ ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା

$$a_2 \times (1) \Rightarrow a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \qquad \text{......................(7)}$$

$$a_1 \times (2) \Rightarrow a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \qquad \text{......................(8)}$$

ସମୀକରଣ (7) ଓ (8)ରେ xର ସହଗ ସମାନ। (7) ରୁ (8)କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \Rightarrow y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ପରିଶେଷରେ yର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (1) [କିମ୍ବା ସମୀକରଣ (2)]ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ

$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଲବ୍ଧ ହେବ।

α ଓ β ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ହେଲେ, $\alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \beta = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ହେବ।

ଉଦାହରଣ - **2 :**

ସମାଧାନ କର : $2x + 3y - 8 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$2x + 3y - 8 = 0 \quad \text{.....(i)}$$
$$3x + y - 5 = 0 \quad \text{.....(ii)}$$
$$3 \times \text{(i)} \Rightarrow 6x + 9y - 24 = 0 \quad \text{.....(iii)}$$
$$2 \times \text{(ii)} \Rightarrow 6x + 2y - 10 = 0 \quad \text{.....(iv)}$$
$$- \quad - \quad +$$
$$\text{(iii)} - \text{(iv)} \Rightarrow 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2$$

ସମୀକରଣ (i) ରେ $y = 2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା

$$2x + 6 - 8 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (1, 2). (ଉତ୍ତର)

(iii) ବଜ୍ର ଗୁଣନ **(Cross Multiplication) :**

ଆମର ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଦେଖିଛେ ଯେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{.....(1)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{.....(2)}$$
$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$ ଅଟେ।

ସମାଧାନରୁ ଆମକୁ ମିଳିବ

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(3)}$$

ଉପରେ (3)ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି ସମାନତାର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମାନ ହେତୁ (3)କୁ

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.....(4)}$$

ରୂପରେ ଲେଖିହେବ। ଏଠାରେ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ।

ସମୀକରଣ (4)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଉକ୍ତିକୁ ବଜ୍ରଗୁଣନ କୁହାଯାଏ। ଏହାକୁ ସହଜରେ ମନେ ରଖିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଇଥାଏ।

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ x ଲବ ଥିବା ପଦର ହରରେ (b_1 ଗୁଣନ c_2) ଫେଡ଼ାଣ (c_1 ଗୁଣନ b_2) ହୁଏ। ସେହିପରି y ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ଓ 1 ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(1) $c_1 = c_2 = 0$ ଓ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ହେଲେ, $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନଟି (0, 0) ଅଟେ। ଏଠାରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ **ସମ ସହସମୀକରଣ (Homogeneous Simultaneous equation)** କୁହାଯାଏ। $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ଓ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ।

(2) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଇଥିଲେ ପ୍ରଥମେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ସର୍ତ୍ତଟି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଆବଶ୍ୟକ।

ଉଦାହରଣ - **3 :**

ସମାଧାନ କର : $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ, $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର $2 \times 1 - 4(-3) = 2 + 12 = 14 \neq 0$ ତେଣୁ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ,

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} -3 & -1 \\ 1 & -9 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -9 & 4 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(-3)(-9) - 1(-1)} = \frac{y}{(-1)4 - (-9)2} = \frac{1}{2 \times 1 - 4(-3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{27+1} = \frac{y}{-4+18} = \frac{1}{2+12} \Rightarrow \frac{x}{28} = \frac{y}{14} = \frac{1}{14} \Rightarrow x = \frac{28}{14} = 2, \quad y = \frac{14}{14} = 1$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1)। (ଉତ୍ତର)

1.3. ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ (Condition for Solvability) :

ଅନୁଚ୍ଛେଦ 1.1ରେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

ର ସମାଧାନ କରିବା ବେଳେ ତିନିଗୋଟି ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିପାରେ ବୋଲି ସୂଚନା ଦିଆଯାଇଥିଲା। ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର (1.2), (1.3), (1.4)ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିଲା। ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 1.2(iii)ରେ ବଜ୍ରଗୁଣନ କରିବା ବେଳେ ଆମେ ଦେଖିଥିଲେ ଯେ (1) ଓ (2) ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \text{ କିମ୍ବା, } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \qquad (3)$$

ହେବା ଆବଶ୍ୟକ। ବସ୍ତୁତଃ ସର୍ତ୍ତ (3) ସତ୍ୟ ହେଲେ ଆମକୁ ଗୋଟିଏ ଓ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ (ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ) ଲବ୍ଧ ହେବ। ଏହି ସର୍ତ୍ତ ସତ୍ୟ ହେଲେ 1.1 ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚିତ ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି ହିଁ ଉପୁଜେ ଓ ଆମେ କହୁ ଯେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର (consistent and independent)।

ମାତ୍ର (3) ସର୍ତ୍ତ ଅସତ୍ୟ ହେଲେ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ହେବ। ବର୍ତ୍ତମାନ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ ହେଲେ କ'ଣ ହେବ ବର୍ତ୍ତମାନ ବିଚାର କରିବା।

ମନେକର $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k \Rightarrow a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2$

ଏଠାରେ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିପାରେ। ଯଥା- $\frac{c_1}{c_2} = k$ କିମ୍ବା, $\frac{c_1}{c_2} \neq k$

ଯଦି $\frac{c_1}{c_2} = k$ ତେବେ, $c_1 = c_2k$ । ସୁତରାଂ ପ୍ରଥମ ସମୀକରଣଟି $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$ka_2x + kb_2y + kc_2 = 0$ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ୍ $k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

ଯେହେତୁ $k \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ହେବ, ଯାହାକି ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣ ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ। ଏହା ଯୋଗୁ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 1.1ରେ ଆଲୋଚିତ ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିଥାଏ। ସୁତରାଂ $\frac{c_1}{c_2}=k$ ହେଲେ ଆମେ ଯାହା ପାଇବା ତାହା ହେଲା—

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \qquad (4)$$

ହେଲେ ଆମକୁ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ନମିଳି ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ମିଳିବ। ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ କହୁ ଯେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ପରସ୍ପର ନିର୍ଭରଶୀଳ (Consistent and dependent)।

ଅବଶେଷରେ $\frac{c_1}{c_2} \neq k$ ହେଲେ ଆମେ ଯାହା ପାଉଛେ ତାହା ହେଲା $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (5)

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମକୁ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସମାଧାନ ମିଳିବ ନାହିଁ କାରଣ ଏଠାରେ $a_1b_2 = a_2b_1$ ଅର୍ଥାତ୍ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ହେବ। ଏହାହିଁ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 1.1ରେ ଆଲୋଚିତ ତୃତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି। ଏଠାରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ (inconsistent)।

ଏହି ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଯାହା ଜାଣିଲେ ତାହାର ସାରାଂଶ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା।

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(I) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଏବଂ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

(II) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ ଏବଂ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

(III) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ଓ କୌଣସି ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସହସମୀକରଣ $a_1x + b_1y = 0$ ଓ $a_2x + b_2y = 0$ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନଟି (0, 0) ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ଓ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବଦା ସଙ୍ଗତ ଅଟନ୍ତି।

ଉଦାହରଣ - 4 :

$3x + my - 2 = 0$, $6x - 4y + 5 = 0$ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର (i) ସମାଧାନ ଅନନ୍ୟ ହେବା ପାଇଁ (ii) ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନ ହେବାପାଇଁ (iii) ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବା ପାଇଁ, mର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ $3x + my - 2 = 0$, $6x - 4y + 5 = 0$

ଏବଂ $a_1 = 3$, $b_1 = m$, $c_1 = -2$, $a_2 = 6$, $b_2 = -4$ ଓ $c_2 = 5$।

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{m}{-4} = -\frac{m}{4}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

(i) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତଟି

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq -\frac{m}{4} \Rightarrow m \neq -2$$

∴ mର ମୂଲ୍ୟ –2ରୁ ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ରାଶି ହେଲେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

(ii) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ଯଦି $m = -2$ କାରଣ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m = -2$ ହେଲେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ସର୍ତ୍ତଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉଛି।

(iii) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତଟି $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

ମାତ୍ର ଏଠାରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{5}$ ସୁତରାଂ ଉପରଲିଖିତ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହେବା ଅସମ୍ଭବ। ଅତଏବ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ। ଅର୍ଥାତ୍ mର ଏପରି କୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ନାହିଁ ଯେପରିକି ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ ହେବେ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 5 :

kର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯେପରି କି $5x - 3y = 0$ ଓ $2x + ky = 0$ ସମ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a_1 = 5$, $b_1 = -3$, $a_2 = 2$, $b_2 = k$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସମ ସହସମୀକରଣ ହୋଇଥିବାରୁ, ଏମାନଙ୍କର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସର୍ତ୍ତଟି $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{-3}{k}$ ଅର୍ଥାତ୍ $k = -\frac{6}{5}$

$\therefore k = -\frac{6}{5}$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସମ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ। (ଉତ୍ତର)

1.4. ଅଣ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ $a_rx + b_ry + c_r = 0,\ r = 1, 2$ (1)

ର ସମାଧାନ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ। ଅନେକ ସହ ସମୀକରଣ ଯାହାକି ଏକଘାତୀ ନୁହେଁ, ସେମାନଙ୍କୁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏକଘାତୀ ରୂପକୁ ଅଣାଯାଇ ପାରିବ ଓ ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଅବଲମ୍ବନରେ ସମାଧାନ କରିହେବ। ମାତ୍ର ଏପରି ଆମେ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ କରି ପାରିବା ନାହିଁ। କେତେଗୁଡ଼ିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏପରି କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଉଦାହରଣ - 6 :

ସମାଧାନ କର : $6x + 3y = 7xy,\ 3x + 9y = 11xy$

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଏକଘାତୀ ନୁହଁନ୍ତି। କିନ୍ତୁ ଉଭୟ ସମୀକରଣର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ xy ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ (ଏଥିପାଇଁ ମନେକର ଯେ, $x \neq 0$ ଓ $y \neq 0$ ତେବେ $xy \neq 0$)

$$\frac{6}{y}+\frac{3}{x} = 7,\quad \frac{3}{y}+\frac{9}{x} = 11$$

ଏଠାରେ $\frac{1}{x} = \upsilon$ ଓ $\frac{1}{y} = v$ ଲେଖିଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ

$3\upsilon + 6v - 7 = 0$ ଏବଂ $9\upsilon + 3v - 11 = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା
$$\frac{\upsilon}{\begin{array}{cc} 6 & -7 \\ \times & \\ 3 & -11 \end{array}} = \frac{v}{\begin{array}{cc} -7 & 3 \\ \times & \\ -11 & 9 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ \times & \\ 9 & 3 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{-66+21} = \frac{v}{-63+33} = \frac{1}{9-54} \Rightarrow \frac{\upsilon}{-45} = \frac{v}{-30} = \frac{1}{-45}$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{-45}{-45} = 1 \text{ ଓ } v = \frac{-30}{-45} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \text{ ଓ } \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1 \text{ ଓ } y = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 :

ସମାଧାନ କର : $\frac{1}{2(2x+3y)} + \frac{12}{7(3x-2y)} = \frac{1}{2},\ \frac{7}{2x+3y} + \frac{4}{3x-2y} = 2$

ସମାଧାନ :

ମନେକର $\upsilon = \frac{1}{2x+3y}$ ଓ $v = \frac{1}{3x-2y}$ (i)

∴ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ $\frac{1}{2}\upsilon + \frac{12}{7}v = \frac{1}{2}$, $7\upsilon + 4v = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ $7\upsilon + 24v - 7 = 0$ (ii)

$7\upsilon + 4v - 2 = 0$ (iii)

(ii) – (iii) $\Rightarrow 20v - 5 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{4}$

$\therefore 3x - 2y = 4$ (iv)

(iii)ରେ $v = \frac{1}{4}$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $7\upsilon + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{7}$

$\therefore 2x + 3y = 7$ (v)

2(iv) – 3(v) $\Rightarrow 2(3x - 2y) - 3(2x + 3y) = 8 - 21$

$\Rightarrow -13y = -13 \Rightarrow y = 1$

(iv) ରେ $y = 1$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $3x - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$

∴ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1) ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $x + y = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ______ । [(4, 5), (–4, 4), (–4, 5), (5, 5)]

(ii) $2x+y+2 = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ______ । [(0, 2), (2, 0), (–2, 0), (0, –2)]

(iii) $3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x =$ ______ । $(4y-1, \frac{1}{3}(4y-1), -\frac{1}{3}(4y-1), -(4y-1)]$

(iv) $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y =$ ______ । [(2x+2), (–2x+2), (2x–2), –(2x+2)]

(v) $2x + 1 = 0$ ଓ $y - 1 = 0$ର ସମାଧାନ ______ ।

$$\left[\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$$

(vi) $ax + by + c = 0$ ସମୀକରଣର ବ୍ୟବହାର କରି xକୁ y ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସର୍ତ୍ତ ______ । $[a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, b + c \neq 0]$

(vii) $x + y + 2 = 0$, $2x + 2y - 5 = 0$ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ______ ।

[ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର, ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ, ଅସଙ୍ଗତ]

(viii) $x + y - 2 = 0$ ଓ $-3x - 3y + 6 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ______ ।

[ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର, ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ; ଅସଙ୍ଗତ]

(ix) $x + y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ______

[ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର, ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ, ଅସଙ୍ଗତ]

(x) $2002x - y = 0$ ଓ $x + 1000y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନଟି ______

[(2002, 1000), (2002, 0), (0, 1000), (0, 0)]

2\. (i) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଅ ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର କୌଣସି ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ।

(ii) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଅ ଯାହାର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

(iii) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଅ ଯାହାର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

(iv) kର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $kx + y + 2 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବେ ?

(v) $kx + my + 4 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେଲେ $k : m$ କେତେ ?

(vi) $2x + 3y - 5 = 0$ ଓ $7x - 6y - 1 = 0$ ସହସମୀକରଣଟିର $(1, \beta)$ ସମାଧାନ ହେଲେ βର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(vii) x ଓ y ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଉଭୟ $x + y + c$ ଓ $ax + by + 1$ ପରିପ୍ରକାଶଦ୍ୱୟର ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ ହେବ ?

(viii) xy – ସମତଳରେ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା L_1 ଓ L_2ର ସମୀକରଣ ଯଥାକ୍ରମେ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$। ଯଦି L_1 ଓ L_2 ପରସ୍ପରକୁ (2, 3) ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି ତେବେ $2a_1 + 3b_1 + c_1$ ଓ $2a_2 + 3b_2 + c_2$ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(ix) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ମୂଳ (0, 0) ହେଲେ c_1ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(x) $ax + by = 0$ ସମୀକରଣର ତିନିଗୋଟି ସମାଧାନ (0, p), (1, q), (2, r) ହେଲେ p, q ଓ rର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

3\. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ସଂକ୍ଷେପରେ ଦିଅ।

(i) $x - y = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) $x - 1 = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iii) $x + y - 3 = 0$ ଓ $y - 2 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iv) $x + y = 0$ ଓ $x - y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କର।

(v) $x + y = 0$ ଓ $x - y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିଟି ଲେଖ।

(vi) $x + y + 1 = 0$ ସମୀକରଣର ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ସମାଧାନ (α_r, β_r), $r = 1, 2, 3$ ଲେଖ ଯେପରିକି $\alpha_r, \beta_r \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ।

(vii) $2x - y = 0$ ସମୀକରଣର ଚାରିଗୋଟି ସମାଧାନ (α_r, β_r), $r = 1, 2, 3, 4$ ଲେଖ ଯେପରିକି $\alpha_r, \beta_r, \in \{1, 2, 3, ...\}$ ।

(viii) $x - 2y + 1 = 0$ ସମୀକରଣର ଯେକୌଣସି ତିନିଗୋଟି ସମାଧାନ (α_r, β_r), $r = 1, 2, 3$ ଲେଖ ଯେପରିକି α_r ଓ β_r ଉଭୟେ ଭଗ୍ନାଂଶ ସଂଖ୍ୟା।

(ix) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ $2x - 3y + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସେଗୁଡ଼ିକ ବାଛ :

(a) (1, 2), (b) (2, 2), (c) (5, 4), (d) (0, 4), (e) (1, 0), (f) (3, 2)

(x) t ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (1, 1) ସମୀକରଣ $3x + ty - 6 = 0$ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ହେବ ?

(xi) t ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (1, 1) ସମୀକରଣ $tx - 2y - 10 = 0$ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ହେବ ?

(xii) t ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (1, 1) ସମୀକରଣ $5x + 3y - t = 0$ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ହେବ ?

(xiii) a_r, b_r, c_r; $r = 1, 2$ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ କେଉଁ ସମ୍ପର୍କ ପାଇଁ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2x + c_2 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ହେବେ ?

(xiv) a_r, b_r, c_r, $r = 1, 2$ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ସମ୍ପର୍କ ପାଇଁ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବେ ?

(xv) t ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $tx + 2y = 0$ ଓ $3x + ty = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ?

4. ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର।

(i) $x + y - 7 = 0$ $x - y - 1 = 0$	(ii) $3x + y - 11 = 0$ $x + 3y - 9 = 0$	(iii) $2x + 3y - 2 = 0$ $10x - 6y - 3 = 0$
(iv) $3x + 2y - 5 = 0$ $x - 3y - 9 = 0$	(v) $8x - 3y - 1 = 0$ $24x - 3y - 14 = 0$	(vi) $x + y - a = 0$ $ax+by-b^2 = 0 (a \neq b)$

ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର।

(i) $x + y - 1 = 0$ $x - y - 3 = 0$	(ii) $2x - y - 5 = 0$ $x + 2y - 10 = 0$	(iii) $4x - y - 7 = 0$ $3x + 4y - 29 = 0$
(iv) $5x - 7y + 6 = 0$ $3x + 2y - 15 = 0$	(v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 4 = 0$ $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} - 1 = 0$	(vi) $ax - by = 0$ $x + y - c = 0 (a + b \neq 0)$

ବଜ୍ରଗୁଣନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର।

(i) $3x - 4y + 1 = 0$ $5x + 2y - 7 = 0$	(ii) $7x + 2y - 8 = 0$ $2x - 3y - 13 = 0$	(iii) $2x + 3y - 2 = 0$ $6x + 6y - 5 = 0$
(iv) $x + 6y + 1 = 0$ $2x + 3y + 8 = 0$	(v) $\frac{x}{6} + \frac{y}{15} - 4 = 0$ $\frac{x}{3} - \frac{y}{12} - \frac{19}{4} = 0$	(vi) $4x - 9y = 0$ $3x + 2y - 35 = 0$

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ସମାଧାନ କର।

(i) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=17,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

(ii) $\frac{5}{x}+6y=13,\ \frac{3}{x}+20y=35$ $(x \neq 0)$

(iii) $2x-\frac{3}{y}=9,\ 3x+\frac{7}{y}=2$ $(y \neq 0)$

(iv) $4x+6y=3xy,\ 8x+9y=5xy$ $(x \neq 0, y \neq 0)$

(v) $(a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2$, $(a+b)x+(a+b)y=a^2+b^2$

(vi) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\ ax-by=a^2-b^2$

(vii) $\frac{5}{x+y}-\frac{2}{x-y}+1=0$, $\frac{15}{x+y}+\frac{7}{x-y}-10=0$

(viii) $\frac{xy}{x+y}=\frac{6}{5},\ \frac{xy}{y-x}=6$ $(x+y \neq 0, x-y \neq 0)$

(ix) $6x+5y=7x+3y+1=2(x+6y-1)$

(x) $\frac{x+y-8}{2}=\frac{x+2y-14}{3}=\frac{3x+y-12}{11}$

(xi) $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8,\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$

(xii) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ ax+by=a^2+b^2$

8. k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯେପରିକି $7x-y=5$ ଓ $21x-3y=k$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ହେବେ।

9. k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯେପରିକି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ।

(i) $x-2y=3$, $3x+ky=1$

(ii) $2x+3y=5$, $kx-6y=8$

(iii) $x-ky=2$, $3x+2y=-5$

10. kର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯେପରିକି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବେ।

(i) $3x-4y+7=0$, $kx+3y-5=0$

(ii) $2x+ky-11=0$, $5x-7y-5=0$

(iii) $kx-5y-2=0$, $6x+2y-7=0$

1.5. ଲେଖଚିତ୍ରଦ୍ୱାରା ସହସମୀକରଣର ସମାଧାନ :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀର ଗଣିତ ପୁସ୍ତକରେ ଆମେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛେ ଯେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖା। ଆମକୁ ପ୍ରଦତ୍ତ ଦୁଇଗୋଟି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ (α, β) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଜାଣି ହୋଇଥାଏ। ଲେଖଚିତ୍ରଦ୍ୱାରା ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି।

ଲେଖଚିତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀ :

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) ଉପଯୁକ୍ତଭାବେ $\overrightarrow{OX}$ ଓ $\overrightarrow{OY}$ ଅଙ୍କନ କର ଓ (i)ରେ (1) ସମୀକରଣର ନିରୂପିତ ସମାଧାନ $P(x_1, y_1)$. ଓ $P_2(x_2, y_2)$କୁ ବିନ୍ଦୁରୂପେ ଲେଖଚିତ୍ର କାଗଜରେ ସ୍ଥାପନ କର। ସେହିପରି (2) ସମୀକରଣ ପାଇଁ ନିରୂପିତ ସମାଧାନଦ୍ୱୟ $P_1'(x_1', y_1')$ ଓ $P_2'(x_2', y_2')$ କୁ ବିନ୍ଦୁରୂପେ ସ୍ଥାପନ କର।

(iii) P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ସଂଯୋଗ କରି L ସରଳରେଖା P_1' ଓ P_2' ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ସଂଯୋଗ କରି L' ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଓ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ $P(\alpha, \beta)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iv). (α, β) ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନ ଅଟେ।

ଉଦାହରଣ - 8 :

ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମାଧାନ କର : $x + y - 3 = 0, x - y - 1 = 0$

ସମାଧାନ :

$x+y-3 = 0$ ର ସମାଧାନ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି। ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିକୁ $y = 3-x$ ରୂପେ ଲେଖି $x = 0$ ଓ $x = 3$ ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିଆଯାଇଛି।

x	0	3
y	3	0

$\therefore$ P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (0, 3) ଓ (3, 0)।

ସେହିପରି $x-y-1 = 0$ କୁ $y = x - 1$ ରୂପେ ଲେଖି $x = 0$ ଓ $x = 1$ ପାଇଁ yର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଛି ଓ ଏହାର ଦୁଇଟି ସମାଧାନକୁ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି।

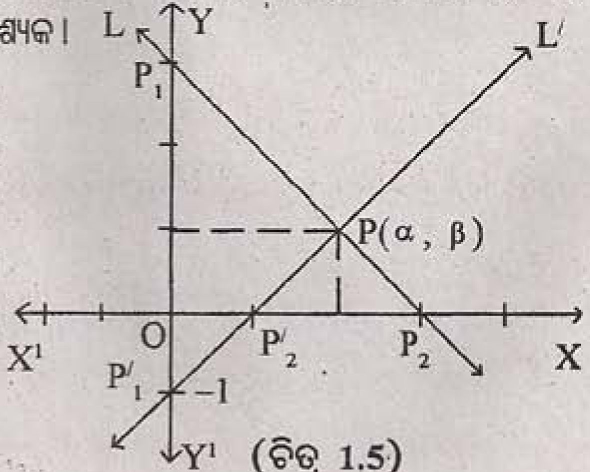
x	0	1
y	−1	0

$\therefore$ P_1' ଓ P_2' ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (0, −1) ଓ (1, 0) ଅଟନ୍ତି।

ଲେଖ କାଗଜରେ $\overrightarrow{OX}$ ଓ $\overrightarrow{OY}$ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଏପରିଭାବେ ଅଙ୍କନ କରାଯିବା ଉଚିତ ଯେପରିକି ନିରୂପିତ ବିନ୍ଦୁ P_1, P_2 ଓ P_1', P_2' ମାନଙ୍କୁ ଲେଖଚିତ୍ର କାଗଜରେ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରିବ। ଏଥିପାଇଁ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଉପରେ 0, ±1, ±2.....ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ସ୍ଥାପନ କରାଯିବା ଆବଶ୍ୟକ।

ଏହାପରେ P_1 ଓ P_2ର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା L ଓ P_1' ଓ P_2' ର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା L' ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ $P(\alpha, \beta)$ କୁ ଚିହ୍ନଟ କରାଗଲା। P ବିନ୍ଦୁର x–ସ୍ଥାନାଙ୍କ α ଓ y–ସ୍ଥାନାଙ୍କ β ହେଲେ (α, β) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ। ଏହି ଉଦାହରଣରେ $\alpha = 2$ ଓ $\beta = 1$ ।

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନଟି (2, 1) ।



(ଚିତ୍ର 1.5)

ମନେରଖଯେ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଉପରିସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟା 0, ±1, ±2......, ଏପରିଭାବେ ଚିହ୍ନିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ଯେପରିକି ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଲେଖଚିତ୍ର କାଗଜ ଉପରେ ରହୁଥିବ। ବିନ୍ଦୁଟି ଲେଖଚିତ୍ର କାଗଜ ବାହାରକୁ ଚାଲିଗଲେ ଏହାର ସମାଧାନ ପାଇବାରେ ବାଧା ସୃଷ୍ଟି କରିଥାଏ।

ଉଦାହରଣ - 9 :

ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମାଧାନ କର : $2x - 3y = 1$, $3x - 4y = 1$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ (i) ଓ (ii)ରୁ $2x - 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(2x - 1)$ (i)

$$3x - 4y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(3x - 1) \qquad \text{(ii)}$$

(i) ରେ xର ଦୁଇଗୋଟି ମାନ ପାଇଁ yର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ସ୍ଥିର କରି ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ଯୋଡ଼ି ପାଇବା।

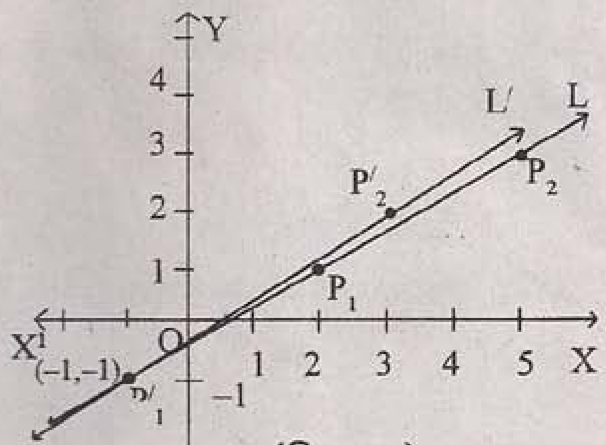
x	2	5
y	1	3

$P_1(2, 1)$ ଏବଂ $P_2(5, 2)$

ସେହିପରି (ii) ପାଇଁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର କ୍ରମିକ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥିର କର।

x	−1	3
y	−1	2

$P'_1(-1, -1)$ ଏବଂ $P'_2(3, 2)$



(ଚିତ୍ର 1.6)

$\therefore$ ପ୍ରଥମ ସମୀକରଣର ସମାଧାନଦ୍ୱୟ (2, 1) ଓ (5, 3) ଓ ଏମାନେ $P_1(2, 1)$, $P_2(5, 3)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ସୂଚାନ୍ତି। ସେହିପରି ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନଦ୍ୱୟ (3, 2), (−1, −1) ଓ ଏମାନେ $P'_1(3, 2)$, $P'_2(-1, -1)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ସୂଚାନ୍ତି। ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ଲେଖଚିତ୍ର କାଗଜରେ $\overrightarrow{OX}$ ଓ $\overrightarrow{OY}$ ଅକ୍ଷ ନେଇ P_1, P_2 ଏବଂ P'_1, P'_2 ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କରିବା ପରେ P_1 ଓ P_2ର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା L ଓ P'_1, P'_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା L′ ଅଙ୍କନ କରାଗଲା (ଚିତ୍ର 1.6)। L ଓ L′ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନ ପ୍ରଦାନ କରିବ। ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ (−1, −1) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି (1 ରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ସମାଧାନ କର :

1. $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$
2. $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$
3. $3x + 2y - 8 = 0$, $5x - 2y - 8 = 0$

4. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$, $2x - y = 1$
5. $3x + 2y = 14$, $-3x + 4y = 10$
6. $2x + y - 4 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$
7. $2x + y - 3 = 0$, $2x - 3y - 7 = 0$
8. $2x - y = 5$, $5x + 2y + 1 = 0$
9. $2y + x = 0$, $x = 6$

10. $5x + 6y = 30$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଉକ୍ତ ଲେଖଚିତ୍ରଟି x–ଅକ୍ଷ, y– ଅକ୍ଷକୁ କେଉଁ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ତାହା ନିରୂପଣ କର।

11. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଟେବୁଲ୍‌ଟି ବ୍ୟବହାର କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ a, bର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

x	1	–1	2	b	5
y	3	a	1	–3	–5

1.6. ପାଟୀଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ପ୍ରୟୋଗ :

ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ଅନେକ ପାଟୀଗଣିତର ଜଟିଳ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରିପାରିବା। ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଥାଇ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି କରାଯାଏ, ତାହା ଅଷ୍ଟମ ତଥା ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି। ଏଠାରେ ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚିତ ଦୁଇଗୋଟି ଏକଘାତୀ ସହସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି ପାଟୀଗଣିତର ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନରେ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରିବ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା।

ଉଦାହରଣ - 10 :

ପିତାଙ୍କ ବୟସର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ସମଷ୍ଟି 105 ବର୍ଷ। ମାତ୍ର ପିତାଙ୍କ ବୟସ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ଦୁଇଗୁଣର ସମଷ୍ଟି 75 ବର୍ଷ। ତେବେ ପିତା ଓ ପୁତ୍ରଙ୍କ ବୟସ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

ମନେକର ପିତାଙ୍କ ବୟସ = x ବର୍ଷ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = y ବର୍ଷ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $2x + y - 105 = 0, x + 2y - 75 = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ କଲେ $\frac{x}{1\times(-75)-2\times(-105)}=\frac{y}{-105\times1-(-75)\times2}=\frac{1}{2\times2-1\times1}$

$$\Rightarrow \frac{x}{135}=\frac{y}{45}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{135}{3}=45 \text{ ଓ } y=\frac{45}{3}=15$$

$\therefore$ ପିତାଙ୍କ ବୟସ = 45 ବର୍ଷ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = 15 ବର୍ଷ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ଏକ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 5 ସେ.ମି. କମାଇ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 3 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9 ବର୍ଗ ସେ.ମି. କମିଯାଏ। ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 3 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 2 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 67 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ବଢ଼ିଯାଏ। ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = x ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥ = y ସେ.ମି.

$\therefore$ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = xy ବର୍ଗ ସେ.ମି.

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $(x - 5)(y + 3) = xy - 9 \Rightarrow 3x - 5y - 6 = 0$

ପୁନଶ୍ଚ $(x + 3)(y + 2) = xy + 67 \Rightarrow 2x + 3y - 61 = 0$

ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟରୁ ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ପାଇବା

$$\frac{x}{(-5)(-61)-(3)(-6)} = \frac{y}{(-6)(2)-(-61)(3)} = \frac{1}{(3)(3)-(2)(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19} \Rightarrow x = \frac{323}{19} = 17 \text{ ଏବଂ } y = \frac{171}{19} = 9$$

$\therefore$ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 9 ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 :

8 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 10 ଦିନରେ ଶେଷକରି ପାରନ୍ତି। 6 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 8 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଉକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 14 ଦିନରେ ଶେଷକରି ପାରିଲେ, ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବ ?

ସମାଧାନ :

ମନେକର ଜଣେ ପୁରୁଷ x ଦିନରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ y ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ ଶେଷକରି ପାରିବେ। ତେବେ ଜଣେ ପୁରୁଷ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{x}$ ଅଂଶ କରିପାରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{y}$ ଅଂଶ କରିପାରେ। ମାତ୍ର 8ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{10}$ ଅଂଶ ଏବଂ 6 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 8 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{14}$ ଅଂଶ କରନ୍ତି।

ସୁତରାଂ ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}, \; \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$\frac{1}{x} = \upsilon$ ଓ $\frac{1}{y} = v$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ ପାଇବା–

$$80\upsilon + 120v - 1 = 0 \text{ ଏବଂ } 84\upsilon + 112v - 1 = 0$$

ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କଲେ

$$\frac{\upsilon}{120(-1)-112(-1)} = \frac{v}{84(-1)-80(-1)} = \frac{1}{80\times112-120\times84}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{-8} = \frac{v}{-4} = \frac{1}{-1120} \Rightarrow \upsilon = \frac{8}{1120} = \frac{1}{140} \text{ ଓ } v = \frac{4}{1120} = \frac{1}{280}$$

$$\Rightarrow x = 140 \text{ ଓ } y = 280$$

$\therefore$ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ 280 ଦିନରେ ସମାପ୍ତ କରିପାରିବ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 :

ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ x ଓ y।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $x + y = 15$......(i) ଏବଂ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$.........(ii)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{xy}=\frac{3}{10}$ [(i)ର ବ୍ୟବହାର ହେତୁ]

$$\Rightarrow xy=\frac{15\times 10}{3}=50$$

କିନ୍ତୁ $x - y = \pm\sqrt{(x+y)^2-4xy}=\pm\sqrt{15^2-4\times 50}=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

$\therefore \quad x - y = 5$ (iii)

କିମ୍ବା, $x - y = -5$ (iv)

(i) ଓ (iii)କୁ ସମାଧାନ କଲେ $x = 10, y = 5$ କିମ୍ବା (i) ଓ (iv)କୁ ସମାଧାନ କଲେ $x = 5$ ଓ $y = 10$ ପାଇବା। ଅତଏବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ 10 ଓ 5। (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1. ରାମ ଓ ଶ୍ୟାମର ବୟସର ଯୋଗଫଳ ଓ ବିୟୋଗଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 60 ବର୍ଷ ଓ 30 ବର୍ଷ ହେଲେ କାହାର ବୟସ କେତେ?
2. ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ପ୍ରଥମଟିର 3 ଗୁଣରୁ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର 2 ଗୁଣ ବିୟୋଗକଲେ ବିୟୋଗଫଳ 2 ହେବ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟଟିରେ 7 ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ ପ୍ରଥମଟିର 2ଗୁଣ ହେବ।
3. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସେ.ମି. ରେ $x + 4$, $4x + y$ ଓ $y + 2$ ହେଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର।
4. ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର $AB = 3x + y$ ସେ.ମି., $BC = 3x + 2$ ସେ.ମି., $CD = 3y - 2x$ ସେ.ମି. ଓ $DA = y + 3$ ସେ.ମି. ହେଲେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ କର।
5. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳର 4 ଗୁଣ। କିନ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 36 ଯୋଗକଲେ ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳିଯାଏ। ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ?
6. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ତାହାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ, ସେ ଦୁହିଁଙ୍କର ଯୋଗଫଳ 121 ଓ ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 3 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ?
7. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାର ଲବ ଓ ହରକୁ ଯୋଗକରି ଯୋଗଫଳର ଏକ ତୃତୀୟାଂଶ ନେଲେ, ତାହା ହରଠାରୁ 4 ଊଣା ହୁଏ ଓ ହରରେ 1 ଯୋଗକରି ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକାରେ ଲେଖିଲେ ତାହା $\frac{1}{4}$ ହୁଏ। ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ?

8. ଏକ ଶହ ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି 10; କିନ୍ତୁ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାର 2 ଗୁଣରୁ 1 ଊଣା ହୁଏ। ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର।

9. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମି. ଅଧିକ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. କମ୍ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 28 ବର୍ଗ ମି. କମିଯାଏ; ମାତ୍ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 1ମି. କମ୍ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. ଅଧିକ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 33 ବର୍ଗ ମି. ବଢ଼ିଯାଏ। ମୂଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୂପଣ କର।

10. 2 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 3 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 5 ଦିନରେ ଶେଷକରି ପାରନ୍ତି। ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ 4ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 9 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର 2 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରନ୍ତି। ତେବେ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ କିମ୍ବା ଜଣେ ପୁରୁଷ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବେ ?

11. A ଓ B ଏକତ୍ର କାମ କରି ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 8 ଦିନରେ ଶେଷକରି ପାରନ୍ତି। ସେମାନେ ଏକତ୍ର କାର୍ଯ୍ୟ ଆରମ୍ଭ କରି 3 ଦିନ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପରେ A ଚାଲିଗଲା ଓ ଅବଶିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟକୁ B ଏକା ଆଉ 15 ଦିନରେ ଶେଷକଲା। ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକାକୀ କାମକଲେ କେତେ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ ଶେଷକରି ପାରିବେ ?

12. ଗୋଟିଏ ନୌକା ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ 25 କି.ମି. ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ 15 କି.ମି. ବାଟ ଯିବାକୁ 10 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେଲା। ସେହିପରି ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳ ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ ଯଥାକ୍ରମେ 30 କି.ମି. ଓ 20 କି.ମି. ଦୂରତା ଯିବାକୁ 13 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନିଏ। ସ୍ରୋତର ବେଗ ଓ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ନୌକାର ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

13. A ଓ Bର ଆୟର ଅନୁପାତ 8 : 7 ଓ ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 19 : 16। ଯଦି ଉଭୟେ 1250 ଟଙ୍କା ସଂଚୟ କରିପାରନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଆୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

14. ଗୋଟିଏ ସାମଗ୍ରୀ A କୁ 5% କ୍ଷତିରେ ଓ ଅନ୍ୟ ଏକ ସାମଗ୍ରୀ B କୁ 15% ଲାଭରେ ବିକ୍ରୟ କରିବାରୁ ଜଣେ ଦୋକାନୀ ମୋଟ 7 ଟଙ୍କା ଲାଭ କଲେ। ଯଦି A କୁ 5% ଲାଭରେ ଓ B କୁ 10% ଲାଭରେ ବିକ୍ରୟ କରିଥାନ୍ତେ ତେବେ ମୋଟ 13 ଟଙ୍କା ଲାଭ କରିଥାନ୍ତେ। ତେବେ A ଓ B ସାମଗ୍ରୀଦ୍ୱୟର କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

15. 30 କି.ମି. ଯିବାକୁ A, B ଅପେକ୍ଷା 3 ଘଣ୍ଟା ଅଧିକ ସମୟ ନିଏ। ଯଦି A ତା'ର ବେଗକୁ 2 ଗୁଣ କରେ ତେବେ ସେହି 30 କି.ମି. ଯିବାକୁ A, B ଅପେକ୍ଷା $1\frac{1}{2}$ ଘଣ୍ଟା କମ୍ ସମୟ ନିଏ। A ଓ Bର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

16. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଉଭୟ ଲବ ଓ ହରରେ 1 ଯୋଗକଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{4}{5}$ ହୋଇଥାଏ ଓ ଉଭୟ ଲବ ଓ ହରରୁ 5 ବିୟୋଗକଲେ ଏହା $\frac{1}{2}$ରେ ପରିଣତ ହୁଏ। ଭଗ୍ନାଂଶଟି ନିରୂପଣ କର।

17. 5 ବର୍ଷ ପରେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ରର ବୟସର ତିନିଗୁଣ ହେବ ଓ 5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର ସାତଗୁଣ ଥିଲା। ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ ସ୍ଥିର କର।

18. ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 90 କି.ମି.। ଦୁଇଟି କାର୍ ଏକା ସମୟରେ P ଓ Qରୁ ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭ କଲେ। ସେମାନେ ଏକା ଦିଗରେ ଯାତ୍ରା କରୁଥିଲେ ପରସ୍ପରକୁ 9 ଘଣ୍ଟା ପରେ ଓ ବିପରୀତ ଦିଗକୁ ଯାତ୍ରା କଲେ $\frac{9}{7}$ଘଣ୍ଟା ପରେ ପରସ୍ପର ସହ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି। କାର୍ ଦୁଇଟିର ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
(ସୂଚନା : ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି x ଓ y କି.ମି. ହେଲେ $9x - 9y = 90$ [ଯଦି ଏକା ଦିଗକୁ ଗତି କରନ୍ତି], $\frac{9}{7}x + \frac{9}{7}y = 90$ [ଯଦି ପରସ୍ପର ଆଡ଼କୁ ଗତି କରନ୍ତି])

19. ଏକ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ସଂଖ୍ୟାଟିରେ ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର କ୍ରମ ବଦଳାଇଲେ ଲବ୍ଧ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସମଷ୍ଟି 187, ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟିରେ ଥିବା ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 1 ହୁଏ ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

20. 50କୁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ଯେପରିକି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସଂଖ୍ୟା (Reciprocal)ର ସମଷ୍ଟି $\frac{1}{12}$ ହେବ।

21. ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ABC ତ୍ରିଭୁଜର $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) $m\angle A + m\angle B = m\angle C$ ଓ $m\angle A - m\angle B = 30^0$

(ii) $m\angle A = 3m\angle B,\ 2m\angle C = 5(m\angle A - m\angle B)$

22. ଦୁଇଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି A ଓ B ମାସିକ ଆୟର ଅନୁପାତ 9 : 7 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 4 : 3 । ଯଦି ଉଭୟଙ୍କ ମାସିକ ସଂଚୟ 200 ଟଙ୍କା ତେବେ ସେମାନଙ୍କ ମାସିକ ଆୟ କେତେ ?

●●●